№1 Найти градиент скалярного поля и проверить, является ли скалярное поле $U(x,y,z)$ гармоническим.

$$U(x,y,z) = x^2+xy-y^2+xz^3-x^3z+1$$

Решение: Градиент скалярного поля U равен

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+xy-y^2+xz^3-x^3z+1) = 2x+y+z^3-3x^2z$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2+xy-y^2+xz^3-x^3z+1) = x-2y$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x^2+xy-y^2+xz^3-x^3z+1) = 3xz^2-x^3$$

$$\text{grad } U = (2x+y+z^3-3x^2z)\vec{i}+(x-2y)\vec{j}+(3xz^2-x^3)\vec{k}$$

Скалярное поле U гармоническое, если

$$\Delta U = 0$$

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x+y+z^3-3x^2z) = 2-6xz$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(x-2y) = -2$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}(3xz^2-x^3) = 6xz$$

$$\Delta U = (2-6xz)+(-2)+(6xz) = 0 \Rightarrow U \text{ гармоническое поле.}$$

Ответ: $\text{grad } U = (2x+y+z^3-3x^2z)\vec{i}+(x-2y)\vec{j}+(3xz^2-x^3)\vec{k}$,

U – гармоническое поле

№2 Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через часть поверхности S, лежащую в первом октанте $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ в направлении нормали, образующей острый угол с осью Oz; сделать чертеж.

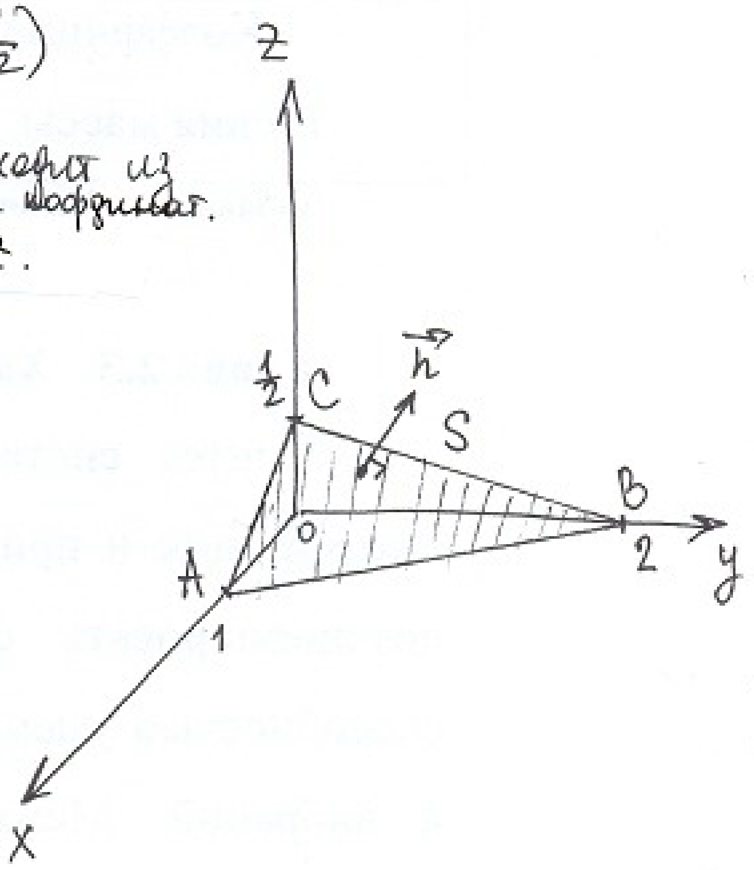
$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\quad S: 4x + 2y + 8z = 4$

Решение: S – это плоскость. Найдем точки пересечения плоскости S с осями:

$Ox: \; y=0, z=0, \; 4x = 4, \; x = 1 \Rightarrow$ т. $A(1;0;0)$

$Oy: \; x=0, z=0, \; 2y = 4, \; y = 2 \Rightarrow$ т. $B(0;2;0)$

$Oz: \; x=0, y=0, \; 8z = 4, \; z = \frac{1}{2} \Rightarrow$ т. $C(0;0;\frac{1}{2})$



Вектор $\vec{n}_0 = (4;2;8)$ ортогонален плоскости S, и выходит из начала координат.

Найдем угол α между вектором $\vec{n}_0$ и осью Oz.

Вектор $\vec{b} = (0;0;1)$ сонаправлен с осью Oz.

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{n}_0, \vec{b})}{|\vec{n}_0| \cdot |\vec{b}|}$$

$$|\vec{n}_0| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 8^2} = \sqrt{16+4+64} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

$$\cos\alpha = \frac{0+0+8}{2\sqrt{21} \cdot 1} = \frac{4}{\sqrt{21}} > 0 \Rightarrow \text{угол } \alpha \text{ острый.}$$

Нормируем вектор $\vec{n}_0$, получим

$$\vec{n} = \frac{1}{2\sqrt{21}}(4;2;8) = \frac{1}{\sqrt{21}}(2;1;4).$$

Поток векторного поля $\vec{a}$ через часть поверхности S, вдоль вектора $\vec{n}$, равен

$$\iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_S \frac{1}{\sqrt{21}}(x \cdot 2 + y \cdot 1 + z \cdot 4)\, dS = \frac{1}{\sqrt{21}} \iint_S (2x + y + 4z)\, dS \; =$$

$S: \; 4x + 2y + 8z = 4$

$8z = 4 - 4x - 2y$

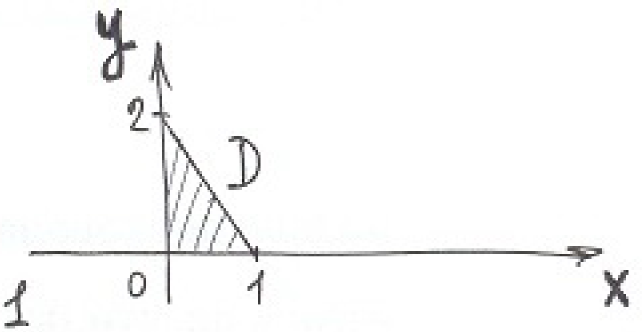
$z = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2}, \; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{4}$

$$= \frac{1}{\sqrt{21}} \iint_D \left(2x + y + 4\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right)\right) \cdot \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2}\, dxdy = \frac{1}{\sqrt{21}} \iint_D (2x + y + 2 - 2x - y) \cdot \sqrt{\frac{21}{16}}\, dxdy =$$

$$= \frac{1}{4} \iint_D 2\, dxdy = \frac{1}{2} \iint_D dxdy \; \boxed{=}$$

где D – это проекция поверхности S на плоскость Oxy

D – это прямоугольный треугольник с катетами длиной 1 и 2.



$\iint\limits_D dx\,dy = |$ площадь треугольника $D| = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 1$

$\boxed{=}\ \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$

Ответ: поток векторного поля $\vec{a}$ равен $\frac{1}{2}$.

№3 Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$ по линии ABFA пересечения с координатными плоскостями той части поверхности S, которая лежит в первом октанте ($x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$).
A, B, F – точки пересечения поверхности S с осями Ox, Oy, Oz соответственно. Сделать чертеж.

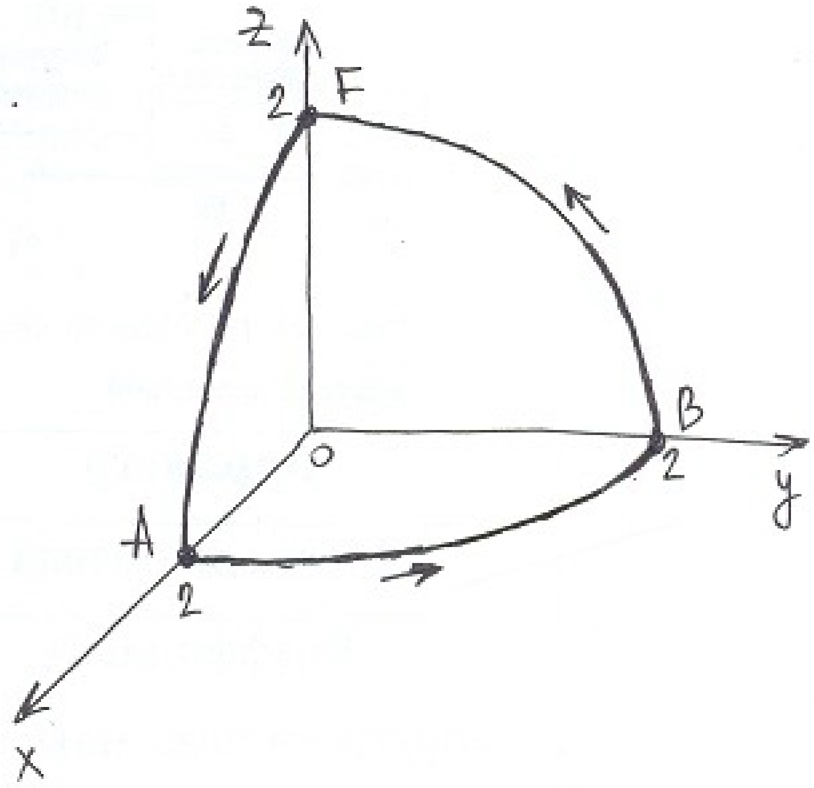
$\vec{a} = xz^2\vec{i} + 3z^2\vec{j} + xy\vec{k}$, S: $x^2+y^2+z^2=4$

Решение: Поверхность S – это сфера радиусом 2 с центром в т. $(0;0;0)$.
Найдем координаты точек A, B, F ($x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$).

Ox: $y=0, z=0$, $x^2=4 \Rightarrow x=2$, $A(2;0;0)$

Oy: $x=0, z=0$, $y^2=4 \Rightarrow y=2$, $B(0;2;0)$

Oz: $x=0, y=0$, $z^2=4 \Rightarrow z=2$, $F(0;0;2)$.



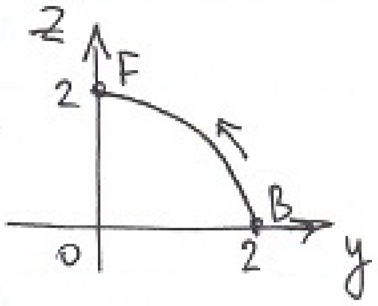
Циркуляция векторного поля $\vec{a}$ по контуру ABFA равна

$$\left(\int\limits_{AB} + \int\limits_{BF} + \int\limits_{FA}\right)(xz^2\,dx + 3z^2\,dy + xy\,dz)$$

AB: $z=0 \Rightarrow dz=0$, тогда

$$\int\limits_{AB}(xz^2\,dx + 3z^2\,dy + xy\,dz) = 0$$

BF: $x=0 \Rightarrow dx=0$



Перейдем к полярным координатам:
$y = 2\cos\varphi$, $z = 2\sin\varphi$, $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$

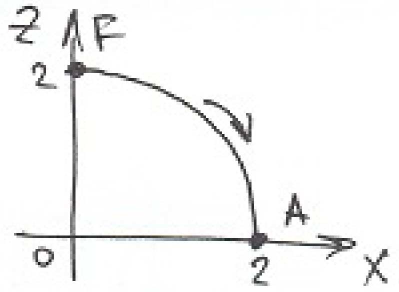
$dy = -2\sin\varphi\,d\varphi$, тогда

$$\int\limits_{BF}(xz^2\,dx + 3z^2\,dy + xy\,dz) = \int\limits_{BF} 3z^2\,dy = 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin\varphi)^2\cdot(-2\sin\varphi)\,d\varphi = -24\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\,d\varphi =$$

$$= -24\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}(3\sin\varphi - \sin 3\varphi)\,d\varphi = -6\left(-3\cos\varphi + \frac{1}{3}\cos 3\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -6\left(-3(-1) + \frac{1}{3}(-1)\right) = -16.$$

FA: $y=0 \Rightarrow dy=0$

Перейдем к полярным координатам:



$x=2\cos\varphi$, $z=2\sin\varphi$, $\frac{\pi}{2}\geq\varphi\geq 0$

$dx=-2\sin\varphi\,d\varphi$, тогда

$$\int\limits_{FA}\left(xz^2dx+3z^2dy+xydz\right)=\int\limits_{FA}xz^2dx=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}(2\cos\varphi)\cdot(2\sin\varphi)^2(-2\sin\varphi)d\varphi=$$

$$=16\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cdot\cos\varphi\,d\varphi=16\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\,d\sin\varphi=16\cdot\frac{\sin^4\varphi}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=4\cdot 1=4$$

Таким образом, циркуляция $\vec{a}$ по контуру ABFA равна
$0+(-16)+4=-12$

<u>Ответ</u>: циркуляция векторного поля $\vec{a}$ по линии ABFA равна -12.