Задание 1. Определить погрешность косвенных измерений величины

$$p_1 = p_2 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma},$$

на основании прямых измерений величин

$$p_2 = (32 \pm 6)\ \text{Ом},$$
$$V_1 = (9{,}2 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3,$$
$$V_2 = (10{,}6 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3,$$
$$\gamma = 2{,}3 \pm 0{,}2$$

с помощью вычисления частных производных измеряемой величины по ее аргументам

Решение:

а) Вычисляем среднее значение

$$\bar{p_1} = 32 \cdot \left(\frac{9{,}2 \cdot 10^{-3}}{10{,}6 \cdot 10^{-3}}\right)^{2{,}3} \approx 23{,}1\ \text{Ом}$$

$$[p_1] = \left[\text{Ом} \cdot \left(\frac{\text{м}^3}{\text{м}^3}\right)^{\gamma}\right] = [\text{Ом}]$$

б) Находим частные производные и вычисляем их значения при средних значениях аргументов

$$\frac{dp_1}{dp_2} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = \left(\frac{9{,}2 \cdot 10^{-3}}{10{,}6 \cdot 10^{-3}}\right)^{2{,}3} \approx 0{,}722$$

$$\left[\frac{dp_1}{dp_2}\right] = \left[\left(\frac{\text{м}^3}{\text{м}^3}\right)^{\gamma}\right] = [1]$$

$$\frac{dp_1}{dV_1} = p_2 \frac{\gamma V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma}} = 32 \cdot \frac{2{,}3 \cdot (9{,}2 \cdot 10^{-3})^{2{,}3-1}}{(10{,}6 \cdot 10^{-3})^{2{,}3}} \approx 5{,}78 \cdot 10^3 \frac{\text{Ом}}{\text{м}^3}$$

$$\left[\frac{dp_1}{dV_1}\right] = \left[\text{Ом} \cdot \frac{1 \cdot (\text{м}^3)^{\gamma-1}}{(\text{м}^3)^{\gamma}}\right] = \left[\frac{\text{Ом}}{\text{м}^3}\right]$$

$$\frac{dp_1}{dV_2} = p_2(-\gamma) \frac{V_1^{\gamma}}{V_2^{\gamma+1}} = 32 \cdot (-2{,}3) \cdot \frac{(9{,}2 \cdot 10^{-3})^{2{,}3}}{(10{,}6 \cdot 10^{-3})^{2{,}3+1}} \approx -5{,}01 \cdot 10^3 \frac{\text{Ом}}{\text{м}^3}$$

$$\left[\frac{dp_1}{dV_2}\right] = \left[\text{Ом} \cdot \frac{1 \cdot (\text{м}^3)^{\gamma}}{(\text{м}^3)^{\gamma+1}}\right] = \left[\frac{\text{Ом}}{\text{м}^3}\right]$$

$$\frac{dp_1}{d\gamma} = p_2 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = 32 \cdot \left(\frac{9{,}2 \cdot 10^{-3}}{10{,}6 \cdot 10^{-3}}\right)^{2{,}3} \cdot \ln\left(\frac{9{,}2 \cdot 10^{-3}}{10{,}6 \cdot 10^{-3}}\right) \approx -3{,}17 \text{ Ом}$$

$$\left[\frac{dp_1}{d\gamma}\right] = \left[\text{Ом} \cdot \left(\frac{\text{м}^3}{\text{м}^3}\right)^{\gamma} \cdot \ln\left(\frac{\text{м}^3}{\text{м}^3}\right)\right] = [\text{Ом}]$$

в) Вычисляем составляющие погрешности от каждого аргумента

$$\Delta(p_1)_{p_2} = \frac{dp_1}{dp_2}\Delta_{p_2} = 0{,}722 \cdot 6 \approx 4{,}33 \text{ Ом}, \quad [1 \cdot \text{Ом}] = [\text{Ом}]$$

$$\Delta(p_1)_{V_1} = \frac{dp_1}{dV_1}\Delta_{V_1} = 5{,}78 \cdot 10^3 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-3} = 0{,}578 \text{ Ом}, \quad \left[\frac{\text{Ом}}{\text{м}^3} \cdot \text{м}^3\right] = [\text{Ом}]$$

$$\Delta(p_1)_{V_2} = \frac{dp_1}{dV_2}\Delta_{V_2} = -5{,}01 \cdot 10^3 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-3} = -0{,}501 \text{ Ом}, \quad \left[\frac{\text{Ом}}{\text{м}^3} \cdot \text{м}^3\right] = [\text{Ом}]$$

$$\Delta(p_1)_{\gamma} = \frac{dp_1}{d\gamma}\Delta_{\gamma} = -3{,}17 \cdot 0{,}2 = -0{,}634 \text{ Ом}, \quad [\text{Ом} \cdot 1] = [\text{Ом}]$$

г) Вычисляем полную абсолютную погрешность

$$\Delta p_1 = \sqrt{\Delta(p_1)_{p_2}^2 + \Delta(p_1)_{V_1}^2 + \Delta(p_1)_{V_2}^2 + \Delta(p_1)_{\gamma}^2} =$$

$$= \sqrt{4{,}33^2 + 0{,}578^2 + (-0{,}501)^2 + (-0{,}634)^2} \approx 4{,}44 \text{ Ом}.$$

д) Вычисляем полную относительную погрешность

$$\delta p_1 = \frac{\Delta p_1}{p_1} \cdot 100\% = \frac{4{,}44}{23{,}1} \cdot 100\% \approx 0{,}19 \cdot 100\% = 19\%$$

е) Результат косвенных измерений (после округления)

$$p_1 = (23 \pm 4) \text{ Ом}, \quad \delta p_1 = 19\%.$$

Ответ:

$$p_1 = (23 \pm 4) \text{ Ом}, \quad \delta p_1 = 19\%.$$

Задача № 3. Имеются следующие данные о цене за нефть *x* (ден.ед.) и индекс нефтяных компаний *y* (усл.ед.):

x_i	20	21	22	23	24	25
y_i	45	47	50	54	58	61

Предполагая, что между переменными существует линейная зависимость, найти эмпирическую формулу вида $y = ax + b$, используя метод наименьших квадратов.

Дать графическую иллюстрацию.

Решение:

Неизвестные коэффициенты $a,\ b$ находим из системы уравнений

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

В нашем случае $n = 6$. Промежуточные расчеты удобно занести в таблицу

	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
	20	45	900	400
	21	47	987	441
	22	50	1100	484
	23	54	1242	529
	24	58	1392	576
	25	61	1525	625
$\sum$	135	315	7146	3055

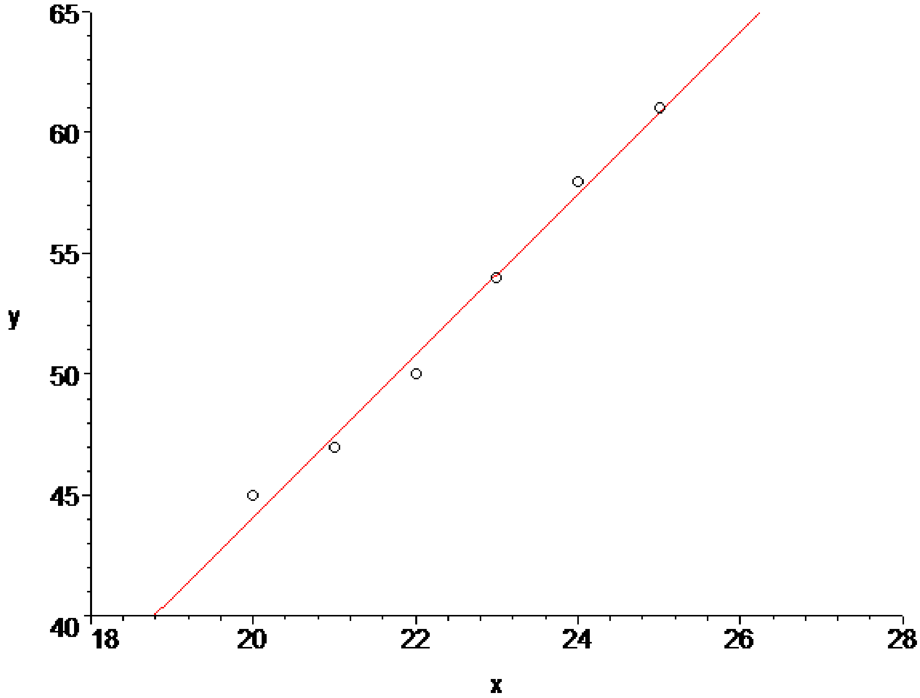
Тогда система уравнений примет вид

$$\begin{cases} 3055a + 135b = 7146 \\ 135a + 6b = 315 \end{cases}$$

Решение системы:

$$a \approx 3{,}34, \quad b \approx -22{,}7.$$

Линейная зависимость имеет вид $y(x) = 3{,}34x - 22{,}7$.



Ответ: $y(x) = 3{,}34x - 22{,}7$