Задача №1.1. Найти в указанной области отличные от тождественного нуля решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющие заданным краевым условиям (задача Штурма-Лиувилля)

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \qquad 1 \le x \le 2, \\ y(1) = y'(2) = 0 \end{cases}$$

Решение:

Рассмотрим три случая:

1) Случай $\lambda < 0$

Общее решение дифференциального уравнения $y'' + \lambda y = 0$ имеет вид

$$y(x) = c_1 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}(x-1) + c_2 \operatorname{ch}\sqrt{-\lambda}(x-1)$$

Производная функции

$$y'(x) = c_1\sqrt{-\lambda}\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda}(x-1) + c_2\sqrt{-\lambda}\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}(x-1)$$

Константы c_1 и c_2 находим из граничных условий

$$\begin{cases} y(1) = c_1 \operatorname{sh}0 + c_2 \operatorname{ch}0 = c_2 = 0 \\ y'(2) = c_1\sqrt{-\lambda}\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda} = 0 \end{cases}$$

Т.к. $\lambda \neq 0$, $\operatorname{ch}\left(\sqrt{-\lambda}\right) > 0$, то $c_1 = 0$

Получили нулевое решение $y(x) \equiv 0$ – не подходит.

2) Случай $\lambda = 0$

Общее решение дифференциального уравнения $y'' = 0$ имеет вид

$$y(x) = c_1 x + c_2.$$

Производная функции $y'(x) = c_1$.

Константы c_1 и c_2 находим из граничных условий

$$\begin{cases} y(1) = c_1 + c_2 = 0 \\ y'(2) = c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_2 = 0$$

Получили нулевое решение $y(x) \equiv 0$ – не подходит.

3) Случай $\lambda > 0$

Общее решение дифференциального уравнения $y'' + \lambda y = 0$ имеет вид

$$y(x) = c_1 \sin\sqrt{\lambda}(x-1) + c_2 \cos\sqrt{\lambda}(x-1)$$

Производная функции

$$y'(x) = c_1\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}(x-1) - c_2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}(x-1)$$

Константы c_1 и c_2 находим из граничных условий

$$\begin{cases} y(1) = c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = c_2 = 0, \\ y'(2) = c_1\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0. \end{cases}$$

Т.к. $\lambda \neq 0$, $c_1 \neq 0$, то получаем следующее спектральное уравнение для нахождения собственных значений задачи Штурма-Лиувилля.

$$\cos\sqrt{\lambda} = 0$$

$$\sqrt{\lambda_k} = \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi(1+2k)}{2}, \quad k = 0,1,2,\dots$$

Следовательно, собственные значения задачи Штурма-Лиувилля

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi(1+2k)}{2}\right)^2, \quad k = 0,1,2,\dots$$

Им соответствуют собственные функции

$$y_k(x) = \sin\left(\frac{\pi(1+2k)}{2}x\right), \quad k = 0,1,2,\dots$$

Ответ: ненулевые решения

$$y_k(x) = \sin\left(\frac{\pi(1+2k)}{2}x\right), \quad k = 0,1,2,\dots$$

<u>Задача №2.12</u>. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду

$$4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + 8u_x + 4u_y = 0$$

<u>Решение:</u>

Вычислим $D = 2^2 - 4 \cdot 1 = 0$ – параболический тип уравнения

Составим характеристическое уравнение

$$4dy^2 - 4dxdy + dx^2 = 0$$

$$(2dy - dx)^2 = 0$$

$$2dy - dx = 0$$

Общий интеграл имеет вид

$$2y - x = c_1$$

Сделаем замену

$$\begin{cases} \xi = 2y - x \\ \eta = x \end{cases}$$

$$\xi_x = -1,\ \ \xi_y = 2,\ \ \eta_x = 1,\ \ \eta_y = 0$$

Найдем вид уравнения в новых переменных (ξ, η), для этого вычислим частные производные функции

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = u_\xi \cdot (-1) + u_\eta \cdot 1 = -u_\xi + u_\eta$$

$$u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y = u_\xi \cdot 2 + u_\eta \cdot 0 = 2u_\xi$$

Для линейной замены производные второго порядка вычисляются по формулам

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_x \cdot \eta_x + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x^2 =$$

$$= u_{\xi\xi} \cdot (-1)^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot (-1) \cdot 1 + u_{\eta\eta} \cdot 1^2 = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_y \cdot \eta_y + u_{\eta\eta} \cdot \eta_y^2 =$$

$$= u_{\xi\xi} \cdot 2^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot 2 \cdot 0 + u_{\eta\eta} \cdot 0^2 = 4u_{\xi\xi}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x \cdot \xi_y + u_{\xi\eta} \cdot \left(\eta_x \xi_y + \xi_x \eta_y\right) + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x \cdot \eta_y =$$

$$= u_{\xi\xi} \cdot (-1) \cdot 2 + u_{\xi\eta} \cdot (1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0) + u_{\eta\eta} \cdot 1 \cdot 0 = -2u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta}$$

Подставляем найденные частные производные в исходное уравнение

$4(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) + 4(-2u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta}) + 4u_{\xi\xi} + 8(-u_{\xi} + u_{\eta}) +$

$+4(2u_{\xi}) = 0$

Приводим подобные слагаемые, получим

$$4u_{\eta\eta} + 8u_{\eta} = 0$$

$$u_{\eta\eta} + 2u_{\eta} = 0$$

Обозначим $v = u_{\eta}$, тогда

$$v_{\eta} + 2v = 0$$

Решение такого дифференциального уравнения имеет вид

$$v = f_1(\xi)e^{-2\eta},$$

где $f_1(\xi)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция. Тогда

$$u_{\eta} = v = f_1(\xi)e^{-2\eta}$$

Интегрируем по η, получим

$$u = \int f_1(\xi)e^{-2\eta}d\eta + g(\xi) = -\frac{1}{2}f_1(\xi)e^{-2\eta} + g(\xi),$$

где $g(\xi)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

Обозначим $f(\xi) = -1/2f_1(\xi)$, тогда

$$u(\xi, \eta) = f(\xi)e^{-2\eta} + g(\xi)$$

Выпишем решение исходного дифференциального уравнения в переменных (x, y)

$$u(x, y) = f(2y - x)e^{-2x} + g(2y - x)$$

Ответ: общее решение

$u(x, y) = f(2y - x)e^{-2x} + g(2y - x)$

где $f(x), g(x)$ – произвольные дважды дифференцируемые функции.

<u>Задача 7.3.</u> Найти решение задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \;\; t > 0; \tag{7.1}$$

$$u(x,t)|_{x=0} = 0, \quad u(x,t)|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0; \tag{7.2}$$

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ l - x, & \frac{l}{2} < x \leq l, l > 0 \end{cases} \tag{7.3}$$

<u>Решение:</u>

Для решения начально-краевой задачи (7.1)-(7.3) применим метод Фурье разделения переменных. Будем искать частное решение задачи в виде

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t).$$

Подставим предполагаемую форму решения в исходное уравнение (7.1)

$$X(x) \cdot T'(t) = X''(x) \cdot T(t)$$

Разделим равенство на $X(x) \cdot T(t)$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 = \text{const},$$

т.к. левая часть равенства зависит только от t, а правая – только от x.

В результате переменные разделяются, и получается два линейных обыкновенных дифференциальных уравнения

$$T'(t) + \lambda^2 T(t) = 0,$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Подставляя $u(x,t)$ в виде $X(x) \cdot T(t)$ в граничные условия (7.2), получим

$$X(0) \cdot T(t) = 0, \;\; X(l) \cdot T(t) = 0.$$

Поскольку равенства должны выполняться тождественно, то

$$X(0) = 0, \qquad X(l) = 0. \tag{7.4}$$

Таким образом, для функции $X(x)$ получили задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$$

Общее решение имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x).$$

Неизвестные коэффициенты C_1, C_2 найдем из граничных условий (7.4)

$$\begin{cases} X(0) = C_1 = 0 \\ X(l) = C_2 \sin(\lambda l) = 0 \end{cases}$$

Получили спектральное уравнение для нахождения собственных значений λ задачи Штурма-Лиувилля

$$\sin(\lambda l) = 0,$$

$$\lambda l = \pi k, \ \ k = 1,2, \dots$$

Собственные значения задачи равны

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{l}, \quad k = 1,2, \dots$$

Им соответствуют собственные функции

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi k}{l}\right), \quad k = 1,2, \dots$$

Уравнение для функции $T(t)$ примет вид

$$T_k'(t) + \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 T_k(t) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$T_k(t) = C_k e^{-\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 t}.$$

Решение $u(x,t)$ исходной задачи будем искать в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)X_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k e^{-\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right).$$

Коэффициенты C_k этого ряда найдем из начального условия (7.3)

$$u(x,t)|_{t=0}=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right)=\varphi(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le\frac{l}{2},\\ l-x, & \frac{l}{2}<x\le l\end{cases}$$

Коэффициенты C_k представляют собой коэффициенты разложения функции $\varphi(x)$ на $[0;l]$ в ряд Фурье по собственным функциям $\left\{\sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$

$$C_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right)dx=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right)dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right)dx\right]=$$

$$=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}x\left(-\frac{l}{\pi k}\right)d\cos\left(\frac{\pi k x}{l}\right)+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\left(-\frac{l}{\pi k}\right)d\cos\left(\frac{\pi k x}{l}\right)\right]=$$

$$=-\frac{2}{\pi k}\left[x\cos\left(\frac{\pi k x}{l}\right)\Big|_0^{\frac{l}{2}}-\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\left(\frac{\pi k x}{l}\right)dx+(l-x)\cos\left(\frac{\pi k x}{l}\right)\Big|_{\frac{l}{2}}^{l}\right.$$

$$\left.-\int_{\frac{l}{2}}^{l}\cos\left(\frac{\pi k x}{l}\right)(-1)dx\right]=$$

$$=-\frac{2}{\pi k}\left[\frac{l}{2}\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)-\frac{l}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right)\Big|_0^{\frac{l}{2}}-\frac{l}{2}\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)+\frac{l}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right)\Big|_{\frac{l}{2}}^{l}\right]=$$

$$=-\frac{2}{\pi k}\left[-\frac{l}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)+\frac{l}{\pi k}\left(\sin(\pi k)-\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)\right)\right]=\frac{4l}{\pi^2k^2}\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right).$$

Таким образом, решение исходной начально-краевой задачи имеет вид

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4l}{\pi^2k^2}\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)e^{-\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2t}\sin\left(\frac{\pi kx}{l}\right)$$

Учитывая, что

$$\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)=\begin{cases}0, & \text{если } k=2n-\text{четное}\\(-1)^n, & \text{если } k=2n+1\ -\text{нечетное}\end{cases}$$

получим

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4l(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2}e^{-\left(\frac{\pi(2n+1)}{l}\right)^2t}\sin\left(\frac{\pi(2n+1)x}{l}\right)$$

Ответ:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4l(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2}e^{-\left(\frac{\pi(2n+1)}{l}\right)^2t}\sin\left(\frac{\pi(2n+1)x}{l}\right)$$